PROBLEMAS MÉTRICOS

ÁNGULOS

Ejercicio nº 1.-

a) Determina la ecuación del plano π que pasa por el punto $P(1, -2, 0)$ y es perpendicular a la recta $r: \{x + y = 0,\ y - 3z + 2 = 0\}$.

b) Halla el ángulo que forman los planos siguientes:

$$\pi_1: x + y = 0 \qquad \pi_2: y - 3z + 2 = 0$$

Ejercicio nº 2.-

Halla el ángulo que forma la recta

$$r: \begin{cases} 3x - y - z + 1 = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

y el plano π: $2x - y + 4z - 2 = 0$.

Ejercicio nº 3.-

a) Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(0, 1, -1)$ y es paralela a los planos π_1: $x + 2y - z - 2 = 0$, π_2: $2x + y + 2z - 1 = 0$.

b) Halla el ángulo que forman π_1 y π_2.

Ejercicio nº 4.-

a) Halla el ángulo que forman las rectas:

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 2 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$$

b) Obtén la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

Ejercicio nº 5.-

Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $P_1(2, 1, -3)$ y $P_2(4, 2, 1)$ y es perpendicular al plano:

$$\pi: 2x - y - z + 3 = 0$$

DISTANCIAS

Ejercicio nº 6.-

Dados los puntos $P(1, 0, 2)$ y $Q(2, -1, 0)$ y el plano π: $x + y + 2z - 1 = 0$, calcula:

a) La distancia entre P y Q.

b) La distancia de P a π.

Ejercicio nº 7.-

Calcula la distancia entre los planos siguientes:

$\pi: y + 3z = 0 \quad \pi': 2y + 6z - 5 = 0$

Ejercicio nº 8.-

Halla la distancia de $P(3, 4, -1)$ al plano $\pi: 2x + y - 3z + 8 = 0$.

Ejercicio nº 9.-

Calcula la distancia entre los planos siguientes:

$\pi: x - 3y + z - 10 = 0 \quad \pi': 2x - 6y + 2z + 3 = 0$

Ejercicio nº 10.-

Halla la distancia de $P(5, 3, -4)$ al plano $\pi: x + 3y - z + 5 = 0$.

Ejercicio nº 11.-

Calcula la distancia de $P(1, 0, 2)$ a la recta $r: (2\lambda, -\lambda, 1 + \lambda)$.

Ejercicio nº 12.-

Calcula la distancia de $P(1, 0, -1)$ a la recta $r: (2\lambda, 1 - \lambda, -\lambda)$.

Ejercicio nº 13.-

Calcula la distancia del punto $P(1, -1, 2)$ a la recta siguiente:

$$r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

Ejercicio nº 14.-

Calcula razonadamente la distancia del punto $P(3, -1, 5)$ a la recta siguiente:

$$r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \quad - \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

Ejercicio nº 15.-

Calcula la distancia de $P(2, 1, -1)$ a la recta $r: (4\lambda, 1 - \lambda, \lambda)$.

Ejercicio nº 16.-

Calcula la distancia entre las rectas r y s:

$$r: \begin{cases} x + y = 2 \\ x - z = -2 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

Ejercicio nº 17.-

Dadas las rectas:

$$r_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{4} \quad , \qquad r_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{1}$$

Halla:

a) La ecuación del plano que pasa por la segunda y es paralelo a la primera.

b) La distancia entre ambas rectas.

Ejercicio nº 18.-

Considera las rectas *r* y *s*:

$$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \quad -2\lambda \\ z = -1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x + z = 2 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Calcula la distancia entre ellas dividiendo el volumen de un paralelepípedo entre el área de su base.

Ejercicio nº 19.-

Calcula la distancia entre:

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \quad -2\lambda \\ z = 5 \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x = 4 - \mu \\ y = 2 + \mu \\ z = \quad \mu \end{cases}$$

dividiendo el volumen de un paralelepípedo entre el área de su base.

Ejercicio nº 20.-

Dadas las rectas:

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \quad 2\lambda \\ z = -2 \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$$

Halla:

a) La distancia entre las rectas.

b) La recta perpendicular a *r* y *s*.

ÁREAS

Ejercicio nº 21.-

Considera el plano $2x - y + z - 4 = 0$.

a) Halla los puntos de corte del plano con los ejes de coordenadas.

b) Calcula el área del triángulo formado por estos tres puntos.

Ejercicio nº 22.-

a) **Obtén la ecuación del plano π que pasa por el punto medio del segmento $\overline{PQ}$ siendo $P(2, 1, 0)$ y $Q(0, 3, 4)$ y es perpendicular a dicho segmento.**

b) **El plano del apartado anterior corta a los ejes de coordenadas en los puntos A, B y C. Calcula el área del triángulo ABC.**

Ejercicio nº 23.-

Los puntos $P(0, 2, 0)$ y $Q(2, 1, -1)$ son dos vértices de un triángulo, y el tercero, S, pertenece a la recta $r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \quad -\lambda \\ z = 3 \end{cases}$ La recta que contiene a P y a S es perpendicular a la recta r.

a) **Determina las coordenadas de S.**

b) **Calcula el área del triángulo PQS.**

Ejercicio nº 24.-

Un cuadrado tiene uno de sus lados sobre la recta

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \quad -2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \qquad \text{y otro sobre} \qquad s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z}{-2}$$

Calcula el área del cuadrado.

Ejercicio nº 25.-

Considera los puntos $A(3, 0, 2)$, $B(4, -1, 3)$ y $C(2, 2, 1)$.

a) **Prueba que son los vértices de un triángulo.**

b) **Calcula el área de dicho triángulo.**

VOLÚMENES

Ejercicio nº 26.-

Calcula el volumen del tetraedro determinado por los ejes de coordenadas y el plano:

$$2x - y + z - 4 = 0$$

Ejercicio nº 27.-

a) **Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P(3, -1, -1)$ y es perpendicular a $\vec{v}(1, 1, 1)$.**

b) **Calcula el volumen del tetraedro determinado por los ejes de coordenadas y el plano anterior.**

Ejercicio nº 28.-

Calcula el volumen de un cubo que tiene uno de sus lados sobre la recta
$r: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$ **y otro sobre la recta** $s: \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}$.

Ejercicio nº 29.-

Considera los puntos $P(2, 1, 1)$ **y** $Q(4, 5, 3)$**.**

a) Obtén la ecuación del plano que pasa por el punto medio de $\overrightarrow{PQ}$ **y es perpendicular a este.**

b) Calcula el volumen del tetraedro limitado por los ejes de coordenadas y el plano π**.**

Ejercicio nº 30.-

$A(0, 1, 2)$, $B(0, 2, 3)$ **y** $C(0, 2, 5)$ **son tres vértices de un tetraedro. El cuarto vértice,** D**, está sobre la recta:**

$$r: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$$

Halla las coordenadas de D **para que el volumen del ortoedro sea 2 unidades cúbicas.**

PROBLEMAS MÉTRICOS

Ejercicio nº 31.-

Halla el punto simétrico de $P(0, 2, 1)$**, respecto del plano** $\pi: x + y - z = 2$**.**

Ejercicio nº 32.-

Halla el punto simétrico de $P(2, 1, 0)$ **respecto del plano** $\pi: 2x - y + z = 2$**.**

Ejercicio nº 33.-

Determina el punto simétrico de $A(-2, 1, 3)$ **respecto de la recta** r**:**

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \quad -2\lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

Ejercicio nº 34.-

Halla el punto simétrico de $P(1, 0, 3)$ **respecto del plano** $\pi: x - y + 2z = 1$**.**

Ejercicio nº 35.-

Determina el punto simétrico de $A(2, 1, 4)$ **respecto de la recta:**

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$$

Ejercicio nº 36.-

Determina la ecuación de un plano π paralelo al plano de ecuación $2x - y + z + 4 = 0$ y que dista 10 unidades del punto $P(2, 0, 1)$.

Ejercicio nº 37.-

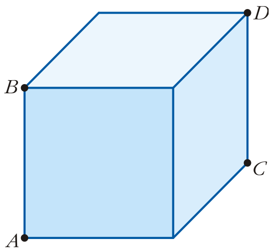
Halla la ecuación de la proyección ortogonal, r', de la recta $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+2}{1}$ sobre el plano $\pi: x - y + z + 2 = 0$.

Ejercicio nº 38.-

Halla la ecuación de la recta s que pasa por $P(2, 0, 1)$ y corta perpendicularmente a la recta $r: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2}$.

Ejercicio nº 39.-

En la figura adjunta, calcula el ángulo que forma la recta CD con la recta que une D y el punto medio de AB.



Ejercicio nº 40.-

Determina la ecuación de un plano, π, paralelo al plano de ecuación $x - y + z + 2 = 0$ y que dista 20 unidades del punto $P(0, 2, 3)$.

SOLCUIONES PROBLEMAS MÉTRICOS

ÁNGULOS

Ejercicio nº 1.-

a) Determina la ecuación del plano π que pasa por el punto $P(1, -2, 0)$ y es perpendicular a la recta r:{$x + y = 0$, $y - 3z + 2 = 0$}.

b) Halla el ángulo que forman los planos siguientes:

$$\pi_1: x + y = 0 \qquad \pi_2: y - 3z + 2 = 0$$

Solución:

a) Vector dirección de la recta: $(1, 1, 0) \times (0, 1, -3) = (-3, 3, 1)$

Este vector es perpendicular a π. Por tanto:

$$\pi_i: -3(x - 1) + 3(y + 2) + z = 0 \quad \rightarrow \quad -3x + 3y + z + 9 = 0$$

b) El vector normal a π_1 es $\vec{n}_1 = (1, 1, 0)$ y el vector normal a π_2 es $\vec{n}_2 = (0, 1, -3)$. Así:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|0+1+0|}{\sqrt{1+1+0} \cdot \sqrt{1+9}} = \frac{1}{\sqrt{20}} = 0{,}22 \quad \rightarrow \quad \alpha = 77°$$

Ejercicio nº 2.-

Halla el ángulo que forma la recta

$$r: \begin{cases} 3x - y - z + 1 = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

y el plano π: $2x - y + 4z - 2 = 0$.

Solución:

Determinamos un vector dirección de r, $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 8\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$\vec{v} = (5, 8, 7)$$

Por otro lado, el vector normal al plano es:

$$\vec{n} = (2, -1, 4)$$

Por tanto:

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|10 - 8 + 28|}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{138}} = \frac{30}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{138}} = 0{,}5573$$

$$90° - \alpha = \arccos(0{,}5573) = 56° \quad \rightarrow \quad \alpha = 34°$$

Ejercicio nº 3.-

a) Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(0, 1, -1)$ y es paralela a los planos π_1: $x + 2y - z - 2 = 0$, π_2: $2x + y + 2z - 1 = 0$.

b) Halla el ángulo que forman π_1 y π_2.

Solución:

a) Al ser paralela a los planos $x + 2y - z - 2 = 0$, $2x + y + 2z - 1 = 0$, es también paralela a la recta:

$$\begin{cases} x + 2y - z - 2 = 0 \\ 2x + y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

determinada por ambos, cuyo vector dirección $\vec{d}$, es:

$$\vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\vec{d} = (5, -4, -3)$$

La ecuación de la recta buscada es: $\dfrac{x}{5} = \dfrac{y-1}{-4} = \dfrac{z+1}{-3}$

b) Los vectores normales son:

$$\vec{n}_1 = (1, 2, -1) \text{ y } \vec{n}_2 = (2, 1, 2)$$

$$\cos\alpha = \frac{|(1, 2, -1) \cdot (2, 1, 2)|}{\sqrt{1+4+1} \cdot \sqrt{4+1+4}} = \frac{2}{\sqrt{54}} = 0{,}27 \rightarrow \alpha = 74^\circ$$

Ejercicio nº 4.-

a) Halla el ángulo que forman las rectas:

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x = 1 + \lambda} \\ \boldsymbol{y = -2\lambda} \\ \boldsymbol{z = 2} \end{cases} \quad \textbf{y} \quad \boldsymbol{s}: \boldsymbol{\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}}$$

b) Obtén la ecuación del plano que contiene a *r* y es paralelo a *s*.

Solución:

a) El vector dirección de r es $\vec{d}_r = (1, -2, 0)$, y el de s es $\vec{d}_s = (2, -1, 1)$. Así:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r| \cdot |\vec{d}_s|} = \frac{4}{\sqrt{1+4} \cdot \sqrt{4+1+1}} = \frac{4}{\sqrt{30}} = 0{,}73 \rightarrow \alpha = 43^\circ$$

b) El plano buscado pasa por $(1, 0, 2)$ y su vector normal es $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$.

$$\vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (-2, -1, 3)$$

Así:

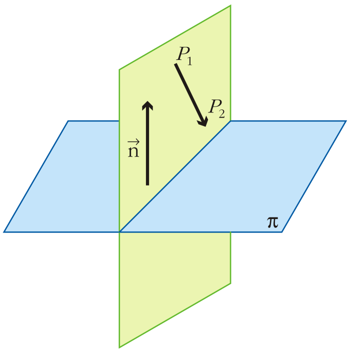
$$-2(x-1) - 1 \cdot y + 3(z-2) = 0 \rightarrow -2x - y + 3z - 4 = 0$$

Ejercicio nº 5.-

Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $P_1(2, 1, -3)$ y $P_2(4, 2, 1)$ y es perpendicular al plano:

π: **$2x - y - z + 3 = 0$**

Solución:



Los vectores $\overrightarrow{P_1P_2}$ y $\vec{n}$ (vector normal del plano π) y uno de los puntos P_1 o P_2 determinan el plano que buscamos:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 2 & 2 \\ y-1 & 1 & -1 \\ z+3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad 3x + 10y - 4z - 28 = 0$$

DISTANCIAS

Ejercicio nº 6.-

Dados los puntos $P(1, 0, 2)$ y $Q(2, -1, 0)$ y el plano π: $x + y + 2z - 1 = 0$, calcula:

a) La distancia entre *P* y *Q*.

b) La distancia de *P* a π.

Solución:

a) $dist\left(P, Q\right) = \sqrt{\left(2-1\right)^2 + \left(-1\right)^2 + \left(-2\right)^2} = \sqrt{6} = 2{,}45$

b) $dist\left(P, \pi\right) = \dfrac{\left|1 + 0 + 2 \cdot 2 - 1\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{6}} = 1{,}63$

Ejercicio nº 7.-

Calcula la distancia entre los planos siguientes:

π: **$y + 3z = 0$** $\quad$ π': **$2y + 6z - 5 = 0$**

Solución:

Los dos planos son paralelos pues los coeficientes de sus incógnitas son proporcionales. Por tanto, la distancia entre ellos es la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro.

$P(0, 3, -1)$ es un punto del plano π.

Por tanto:

$$dist(\pi, \pi') = dist(P, \pi') = \frac{|6 + 6 \cdot (-1) - 5|}{\sqrt{4 + 36}} = \frac{5}{\sqrt{40}} = 0{,}79$$

Ejercicio nº 8.-

Halla la distancia de $P(3, 4, -1)$ al plano $\pi: 2x + y - 3z + 8 = 0$.

Solución:

$$dist(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 3 + 4 - 3 \cdot (-1) + 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \frac{21}{\sqrt{14}} = 5{,}61$$

Ejercicio nº 9.-

Calcula la distancia entre los planos siguientes:

$\pi: x - 3y + z - 10 = 0 \quad \pi': 2x - 6y + 2z + 3 = 0$

Solución:

Los dos planos son paralelos pues los coeficientes de sus incógnitas son proporcionales. Por tanto, la distancia entre ellos es la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro.

$P(1, 0, 9)$ es un punto del plano π.

Por tanto:

$$dist(\pi, \pi') = dist(P, \pi') = \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 9 + 3}{\sqrt{4 + 36 + 4}} = \frac{23}{\sqrt{44}} = 3{,}47$$

Ejercicio nº 10.-

Halla la distancia de $P(5, 3, -4)$ al plano $\pi: x + 3y - z + 5 = 0$.

Solución:

$$dist(P, \pi) = \frac{|5 + 3 \cdot 3 + 4 + 5|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{23}{\sqrt{11}} = 6{,}93$$

Ejercicio nº 11.-

Calcula la distancia de $P(1, 0, 2)$ a la recta $r: (2\lambda, -\lambda, 1 + \lambda)$.

Solución:

1ª *forma:*

- Plano π que pasa por P y es perpendicular a r:

  Su vector normal es el vector dirección de la recta: $\vec{n} = (2, -1, 1)$. Pasa por $P(1, 0, 2)$.

  Su ecuación es:

  $\pi: 2(x - 1) - y + (z - 2) = 0 \quad \rightarrow \quad \pi: 2x - y + z - 4 = 0$

- Intersección de π y r:

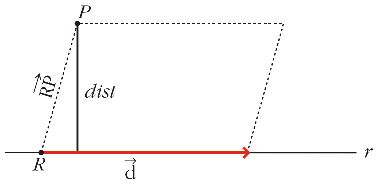
Sustituimos las coordenadas de r en π:

$$2 \cdot (2\lambda) + \lambda + (1+\lambda) - 4 = 0 \;\rightarrow\; 6\lambda - 3 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{-1}{2} \\ z = \dfrac{3}{2} \end{cases} \;\rightarrow\; P'\left(1, \frac{-1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

- Distancia pedida:

$$dist(P, r) = dist(P, P') = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}71$$

2ª *forma:*



Recta $r: \begin{cases} R(0, 0, 1) \\ \vec{d}(2, -1, 1) \end{cases}$

Punto $P(1, 0, 2)$

$$dist(P, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{\left|\overrightarrow{RP} \times \vec{d}\right|}{\left|\vec{d}\right|} \qquad \begin{cases} \overrightarrow{RP} \times \vec{d} = (1, 1, -1) \\ \left|\overrightarrow{RP} \times \vec{d}\right| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \\ \left|\vec{d}\right| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6} \end{cases}$$

$$dist(P, r) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = 0{,}71$$

<u>Ejercicio nº 12.-</u>

Calcula la distancia de *P*(1, 0, –1) a la recta *r* : (2λ, 1 – λ, –λ).

Solución:

- Plano π que pasa por P y es perpendicular a r:

  Su vector normal es el vector dirección de la recta: $\vec{n} = (2, -1, -1)$. Pasa por P.

  Su ecuación es:

  π: $2 \cdot (x - 1) - y - 1 \cdot (z + 1) = 0 \;\rightarrow\; \pi$: $2x - y - z - 3 = 0$

- Intersección de π y r:

  Sustituimos las coordenadas de r en π:

$$2\cdot(2\lambda)-(1-\lambda)+\lambda-3=0 \;\rightarrow\; 6\lambda-4=0 \;\rightarrow\; \lambda=\frac{2}{3} \;\rightarrow\; \begin{cases} x=\dfrac{4}{3} \\[2ex] y=\dfrac{1}{3} \\[2ex] z=\dfrac{-2}{3} \end{cases} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; P'\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$$

- Distancia pedida:

$$dist(P, r)=dist(P, P')=\sqrt{\left(1-\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-1+\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}=0{,}58$$

<u>Ejercicio nº 13.-</u>

Calcula la distancia del punto *P*(1, –1, 2) a la recta siguiente:

$$r:\begin{cases} \boldsymbol{x}=\mathbf{2}\lambda \\ \boldsymbol{y}=\lambda \\ \boldsymbol{z}=-\lambda \end{cases}$$

Solución:

- Plano π que pasa por P y es perpendicular a r:

  Su vector normal es el vector dirección de la recta: $\vec{n}=(2, 1, -1)$. Pasa por $P(1, -1, 2)$.

  Su ecuación es:

  $$\pi\!: 2\cdot(x-1)+(y+1)-(z-2)=0 \;\rightarrow\; \pi\!: 2x+y-z+1=0$$

- Intersección de π y r.

  Sustituimos las coordenadas de r en π:

$$2\cdot(2\lambda)+\lambda+\lambda+1=0 \;\rightarrow\; 6\lambda+1=0 \;\rightarrow\; \lambda=\frac{-1}{6} \;\rightarrow\; \begin{cases} x=\dfrac{-2}{6} \\[2ex] y=\dfrac{-1}{6} \\[2ex] z=\dfrac{1}{6} \end{cases} \;\rightarrow\; P'\left(\frac{-2}{6}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

- Distancia pedida:

$$dist(P, r)=dist(P, P')=\sqrt{\left(1+\frac{2}{6}\right)^2+\left(-1+\frac{1}{6}\right)^2+\left(2-\frac{1}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{210}}{6}=2{,}42$$

Ejercicio nº 14.-

Calcula razonadamente la distancia del punto *P*(3, –1, 5) a la recta siguiente:

$$r:\begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = \quad -\lambda \\ z = 3+2\lambda \end{cases}$$

Solución:

- Plano π que pasa por P y es perpendicular a r:

  Su vector normal, es el vector dirección de la recta: $\vec{n}=(-1,-1,2)$. Pasa por $P(3,-1,5)$.
  Su ecuación es:

  $$-1\cdot(x-3)-1\cdot(y+1)+2\cdot(z-5)=0$$

  Simplificando:

  π: $-x-y+2z-8=0$ o también π: $x+y-2z+8=0$.

- Intersección de π y r:

  Sustituimos las coordenadas de r en π.

$$(2-\lambda)-\lambda-2(3+2\lambda)+8=0 \;\rightarrow\; -6\lambda+4=0 \;\rightarrow\; \lambda=\frac{2}{3} \;\rightarrow\; \begin{cases} x=\dfrac{4}{3} \\ y=\dfrac{-2}{3} \\ z=\dfrac{13}{3} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow\; P'\left(\frac{4}{3},\frac{-2}{3},\frac{13}{3}\right)$$

- Distancia pedida:

$$dist(P,r)=dist(P,P')=\sqrt{\left(3-\frac{4}{3}\right)^2+\left(-1+\frac{2}{3}\right)^2+\left(5-\frac{13}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{30}}{3}=1{,}83$$

Ejercicio nº 15.-

Calcula la distancia de *P*(2, 1, –1) a la recta *r* : (4λ, 1 – λ, λ).

Solución:

1ª *forma:*

- Plano π que pasa por P y es perpendicular a r:

  Su vector normal es el vector dirección de la recta: $\vec{n}=(4,-1,1)$. Pasa por P.

  Su ecuación es:

  π: $4\cdot(x-2)-1\cdot(y-1)+(z+1)=0 \;\rightarrow\; \pi$: $4x-y+z-6=0$

- Intersección de π y r:

Sustituimos las coordenadas de r en π:

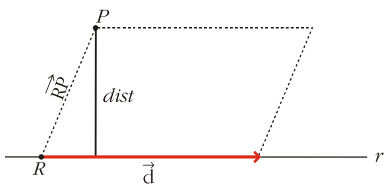
$$4\cdot(4\lambda)-(1-\lambda)+\lambda-6=0 \;\rightarrow\; 16\lambda+\lambda+\lambda-7=0 \;\rightarrow\; 18\lambda-7=0 \;\rightarrow\; \lambda=\frac{7}{18} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{14}{9} \\[2mm] y=\dfrac{11}{18} \\[2mm] z=\dfrac{7}{18} \end{cases} \rightarrow\; P'\left(\frac{14}{9},\frac{11}{18},\frac{7}{18}\right)$$

- Distancia pedida:

$$dist(P, r)=dist(P, P')=\sqrt{\left(2-\frac{14}{9}\right)^2+\left(1-\frac{11}{18}\right)^2+\left(-1-\frac{7}{18}\right)^2}=\frac{\sqrt{738}}{18}=1{,}5$$

2ª *forma:*



Recta $r:\begin{cases} R(0,1,0) \\ \vec{d}(4,-1,1)\end{cases}$

Punto $P(2,1,-1)$

$$dist(P, r)=\frac{\text{Área}}{\text{Base}}=\frac{\left|\overrightarrow{RP}\times\vec{d}\right|}{\left|\vec{d}\right|} \qquad \begin{cases} \overrightarrow{RP}\times\vec{d}=(-1,-6,-2) \\ \left|\overrightarrow{RP}\times\vec{d}\right|=\sqrt{1+36+4}=\sqrt{41} \\ \left|\vec{d}\right|=\sqrt{16+1+1}=\sqrt{18}\end{cases}$$

$$dist(P, r)=\frac{\sqrt{41}}{\sqrt{18}}=1{,}5$$

<u>Ejercicio nº 16.-</u>

Calcula la distancia entre las rectas *r* y *s*:

$$r:\begin{cases} x+y=2 \\ x-z=-2\end{cases} \qquad s:\begin{cases} x+z=0 \\ y-z=1\end{cases}$$

Solución:

El vector dirección de r es $\vec{d}=(1,-1,1)$ y el de s es $\vec{d}'=(-1,1,1)$.

Hallemos el plano π que contiene a r y es paralelo a s.

$\left.\begin{array}{l}(1,-1,1)\;//\;r \\ (-1,1,1)\;//\;s\end{array}\right\}$ Por tanto, $(1,-1,1)\times(-1,1,1)=(-2,-2,0)$ es perpendicular a π.

El punto $(-2, 4, 0)$ es de r y, por tanto, de π.

Ecuación de π:

$$-2(x+2)-2(y-4)=0 \quad \rightarrow \quad 2x+2y-4=0$$

$$dist\,(s,\,r)=dist\,(s,\,\pi)=dist\,[(0,\,1,\,0),\,\pi]=\frac{|2-4|}{\sqrt{4+4}}=\frac{2}{\sqrt{8}}=0{,}71$$

Ejercicio nº 17.-

Dadas las rectas:

$$r_1:\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{4}\ ,\qquad r_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}$$

Halla:

a) La ecuación del plano que pasa por la segunda y es paralelo a la primera.

b) La distancia entre ambas rectas.

Solución:

a) Hallamos el plano, π, que contiene a r_2 y es paralelo a r_1.

$$\left.\begin{array}{l}(3,\,2,\,4)\,//\,r_1\\(2,\,3,\,1)\,//\,r_2\end{array}\right\}\ \text{Por tanto, } (3,\,2,\,4)\times(2,\,3,\,1)=(-10,\,5,\,5)\ \text{es perpendicular a } \pi.$$

El punto $(1, -1, 3)$ es de r_2 y, por tanto, de π.

Ecuación de π:

$$-10(x-1)+5(y+1)+5(z-3)=0 \quad \rightarrow \quad \pi\text{: } 2x-y-z=0$$

b) $$dist\,(r_1,\,r_2)=dist\,(r_1,\,\pi)=dist\,[(2,\,-3,\,1),\,\pi]=\frac{|4+3-1|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=2{,}45$$

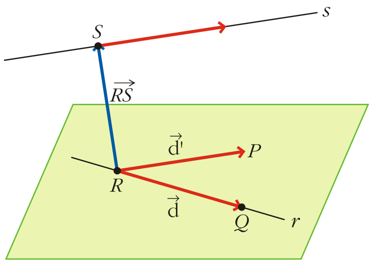
Ejercicio nº 18.-

Considera las rectas r y s:

$$r:\begin{cases}x=3+\lambda\\y=\quad-2\lambda\\z=-1\end{cases}\qquad\qquad s:\begin{cases}x+z=2\\y-z=0\end{cases}$$

Calcula la distancia entre ellas dividiendo el volumen de un paralelepípedo entre el área de su base.

Solución:



$$dist\,(s,\,r)=dist\,(S,\,\text{plano } RPQ)=\frac{\text{Volumen del paralelepípedo definido por } \overrightarrow{RS},\ \vec{d},\ \vec{d'}}{\text{Área del paralelogramo definido por } \vec{d},\ \vec{d'}}=$$

$$= \frac{\left|\left[\overrightarrow{RS},\ \vec{d},\ \vec{d}'\right]\right|}{\left|\vec{d} \times \vec{d}'\right|}$$

$$r \begin{cases} \text{Un punto:} \quad R(3,\ 0,\ -1) \\ \text{Un vector dirección:} \quad \vec{d}(1,\ -2,\ 0) \end{cases}$$

$$s \begin{cases} \text{Un punto:} \quad S(2,\ 0,\ 0) \\ \text{Un vector dirección:} \quad \vec{d}'(-1,\ 1,\ 1) \end{cases}$$

$$\left[\overrightarrow{RS},\ \vec{d},\ \vec{d}'\right] = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\vec{d} \times \vec{d}' = (-2,\ -1,\ -1)$$

$$\left|\vec{d} \times \vec{d}'\right| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$dist\,(r,\ s) = \frac{1}{\sqrt{6}} = 0{,}41$$

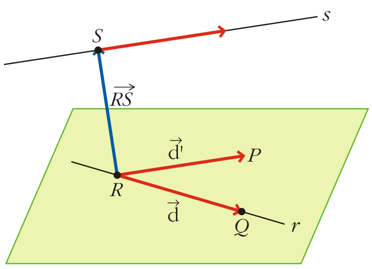
<u>Ejercicio nº 19.-</u>

Calcula la distancia entre:

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \quad -2\lambda \\ z = 5 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s: \begin{cases} x = 4 - \mu \\ y = 2 + \mu \\ z = \quad \mu \end{cases}$$

dividiendo el volumen de un paralelepípedo entre el área de su base.

Solución:



$$dist\,(r,\ s) = dist\,(S,\ \text{plano } RPQ) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo definido por } \overrightarrow{RS},\ \vec{d},\ \vec{d}'}{\text{Área del paralelogramo definido por } \vec{d},\ \vec{d}'} =$$

$$= \frac{\left|\left[\overrightarrow{RS},\ \vec{d},\ \vec{d}'\right]\right|}{\left|\vec{d} \times \vec{d}'\right|}$$

$$\left[\overrightarrow{RS},\ \vec{d},\ \vec{d}'\right] = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\vec{d} \times \vec{d}' = (-2, -1, -1)$$

$$\left|\vec{d} \times \vec{d}'\right| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$dist\,(r, s) = \frac{1}{\sqrt{6}} = 0{,}41$$

<u>Ejercicio nº 20.-</u>

Dadas las rectas:

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x} = \mathbf{1} + \lambda \\ \boldsymbol{y} = \quad \mathbf{2}\lambda \\ \boldsymbol{z} = -\mathbf{2} \end{cases} \qquad \mathbf{y} \qquad \boldsymbol{s}: \frac{\boldsymbol{x}-\mathbf{2}}{\mathbf{3}} = \frac{\boldsymbol{y}}{\mathbf{2}} = \frac{\boldsymbol{z}-\mathbf{1}}{\mathbf{1}}$$

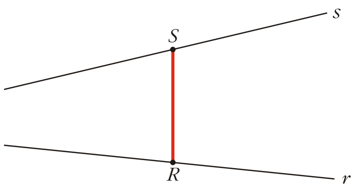
Halla:

a) La distancia entre las rectas.

b) La recta perpendicular a *r* y *s*.

Solución:

a) *R* y *S* son los extremos del segmento perpendicular a ambas rectas.



Un punto genérico de *r* es $R(1+\lambda, 2\lambda, -2)$ y un punto genérico de *s* es $S(2+3\mu, 2\mu, 1+\mu)$.

Un vector genérico que tenga su origen en *r* y su extremo en *S* es:

$$\overrightarrow{RS} = (1 + 3\mu - \lambda,\ 2\mu - 2\lambda,\ 3 + \mu)$$

De todos los posibles vectores $\overrightarrow{RS}$, buscamos aquel que sea perpendicular a las dos rectas:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{RS} \cdot (1, 2, 0) = 0 \ \rightarrow\ 1 + 3\mu - \lambda + 4\mu - 4\lambda = 0 \\ \overrightarrow{RS} \cdot (3, 2, 1) = 0 \ \rightarrow\ 3 + 9\mu - 3\lambda + 4\mu - 4\lambda + 3 + \mu = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 - 5\lambda + 7\mu = 0 \\ 6 - 7\lambda + 14\mu = 0 \end{array}\right\}$$

La solución es: $\lambda = \frac{-4}{3},\ \ \mu = \frac{-23}{21}$

Sustituyendo en *r* y *s* obtenemos los puntos *R* y *S*.

$$\left.\begin{array}{l} R\left(\frac{-1}{3}, \frac{-8}{3}, -2\right) \\ \\ S\left(\frac{-9}{7}, \frac{-46}{21}, \frac{-2}{21}\right) \end{array}\right\} dist\,(r, s) = dist\,(R, S) = \sqrt{\left(\frac{-20}{21}\right)^2 + \left(\frac{10}{21}\right)^2 + \left(\frac{40}{21}\right)^2} = \frac{\sqrt{2100}}{21} = 2{,}18$$

b) La recta perpendicular a r y s, es la recta que pasa por R y S.

$$\overrightarrow{RS} = \left(\frac{-20}{21}, \frac{10}{21}, \frac{40}{21} \right)$$

La recta buscada es: $\begin{cases} x = \dfrac{-1}{3} - \dfrac{20}{21}\lambda \\ y = \dfrac{-8}{3} + \dfrac{10}{21}\lambda \\ z = -2 + \dfrac{40}{21}\lambda \end{cases}$

ÁREAS

Ejercicio nº 21.-

Considera el plano $2x - y + z - 4 = 0$.

a) Halla los puntos de corte del plano con los ejes de coordenadas.

b) Calcula el área del triángulo formado por estos tres puntos.

Solución:

a) Si $y = 0,\ z = 0 \quad \to \quad x = 2 \quad \to \quad A(2, 0, 0)$

Si $x = 0,\ z = 0 \quad \to \quad y = -4 \quad \to \quad B(0, -4, 0)$

Si $x = 0,\ y = 0 \quad \to \quad z = 4 \quad \to \quad C(0, 0, 4)$

b) $\overrightarrow{AB} = (-2, -4, 0)$

$\overrightarrow{AC} = (-2, 0\ 4)$

$$\text{Área } ABC = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{|(-16, 8, -8)|}{2} = \frac{\sqrt{384}}{2} = 9{,}8 \text{ u}^2$$

Ejercicio nº 22.-

a) Obtén la ecuación del plano π que pasa por el punto medio del segmento $\overline{PQ}$ siendo *P*(2, 1, 0) y *Q*(0, 3, 4) y es perpendicular a dicho segmento.

b) El plano del apartado anterior corta a los ejes de coordenadas en los puntos *A*, *B* y *C*. Calcula el área del triángulo *ABC*.

Solución:

a) Calculamos el punto medio de $\overline{PQ}$:

$M = (1, 2, 2)$

El vector normal a π es el vector $\overrightarrow{PQ} = (-2, 2, 4)$, por tanto, el plano es:

$-2(x - 1) + 2(y - 2) + 4(z - 2) = 0$

$-2x + 2y + 4z - 10 = 0$

$2x - 2y - 4z + 10 = 0$

b) Calculamos los puntos A, B y C:

Si $z = 0$, $y = 0$ $\rightarrow$ $x = -5$ $\rightarrow$ $A(-5, 0, 0)$

Si $x = 0$, $z = 0$ $\rightarrow$ $y = 5$ $\rightarrow$ $B(0, 5, 0)$

Si $x = 0$, $y = 0$ $\rightarrow$ $z = \frac{5}{2}$ $\rightarrow$ $C\left(0, 0, \frac{5}{2}\right)$

$$\text{Área } ABC = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{\left|\left(\frac{25}{2}, \frac{-25}{2}, -25\right)\right|}{2} = \frac{\sqrt{3750}}{4} = 15{,}3 \text{ u}^2$$

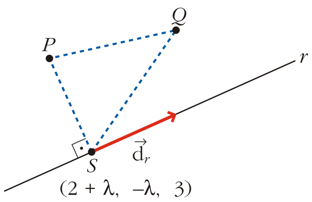
<u>Ejercicio nº 23.-</u>

Los puntos $P(0, 2, 0)$ y $Q(2, 1, -1)$ son dos vértices de un triángulo, y el tercero, S, pertenece a la recta $r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \quad -\lambda \\ z = 3 \end{cases}$ La recta que contiene a P y a S es perpendicular a la recta r.

a) Determina las coordenadas de S.

b) Calcula el área del triángulo PQS.

Solución:



a) $\overrightarrow{PS} \perp \vec{d}_r \rightarrow \overrightarrow{PS} \cdot \vec{d}_r = 0$

$(2 + \lambda, -\lambda - 2, 3) \cdot (1, -1, 0) = 0$

$2 + \lambda + \lambda + 2 = 0$

$\lambda = -2 \rightarrow S = (0, 2, 3)$

b) $\overrightarrow{PS} = (0, 0, 3)$

$\overrightarrow{PQ} = (2, -1, -1)$

$$\text{Área } PQS = \frac{\left|\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{PQ}\right|}{2} = \frac{|(3, 6, 0)|}{2} = \frac{\sqrt{45}}{2} = 3{,}35 \text{ u}^2$$

Ejercicio nº 24.-

Un cuadrado tiene uno de sus lados sobre la recta

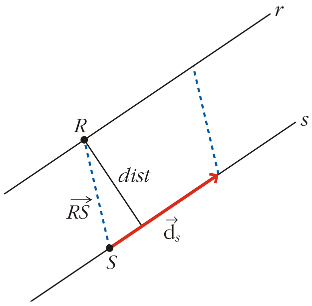
$$r:\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \quad -2\lambda \\ z = 3-\lambda \end{cases} \quad \text{y otro sobre} \quad s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z}{-2}$$

Calcula el área del cuadrado.

Solución:

$\vec{d}_r = (1, -2, -1) \ // \ \vec{d}_s = (2, -4, -2)$. Por tanto las dos rectas son paralelas.

El lado del cuadrado es la distancia entre r y s.



$$dist(r, s) = dist(R, s) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{\left|\overrightarrow{RS} \times \vec{d}_s\right|}{\left|\vec{d}_s\right|} = \frac{|(-10, -4, -2)|}{\sqrt{4+16+4}} = \frac{\sqrt{120}}{\sqrt{24}} = \sqrt{5} = \text{lado del cuadrado}$$

Por tanto, $\text{Área} = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5 \text{ u}^2$

Ejercicio nº 25.-

Considera los puntos $A(3, 0, 2)$, $B(4, -1, 3)$ y $C(2, 2, 1)$.

a) Prueba que son los vértices de un triángulo.

b) Calcula el área de dicho triángulo.

Solución:

a) Hay que probar que A, B y C no están alineados.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1, -1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (-1, 2, -1) \end{array}\right\}$$

Sus coordenadas no son proporcionales, luego los puntos no están alineados y son los vértices de un triángulo.

b) $\text{Área } ABC = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2} = \dfrac{|(-1, 0, 1)|}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}71 \text{ u}^2$

VOLÚMENES

Ejercicio nº 26.-

Calcula el volumen del tetraedro determinado por los ejes de coordenadas y el plano:
$2x - y + z - 4 = 0$

Solución:

Buscamos los puntos de corte con los ejes:

Si $y = 0,\ z = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2 \quad \rightarrow \quad A(2, 0, 0)$

Si $x = 0,\ z = 0 \quad \rightarrow \quad y = -4 \quad \rightarrow \quad B(0, -4, 0)$

Si $x = 0,\ y = 0 \quad \rightarrow \quad z = 4 \quad \rightarrow \quad C(0, 0, 4)$

El cuarto vértice del tetraedro es el punto $D(0, 0, 0)$.

$$\overrightarrow{DA} = (2, 0, 0)$$

$$\overrightarrow{DB} = (0, -4, 0)$$

$$\overrightarrow{DC} = (0, 0, 4)$$

$$\text{Volumen de } ABCD = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\right]\right| = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 32 = \frac{16}{3} \text{ u}^3$$

<u>Ejercicio nº 27.-</u>

a) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P(3, -1, -1)$ y es perpendicular a $\vec{v}(1, 1, 1)$.

b) Calcula el volumen del tetraedro determinado por los ejes de coordenadas y el plano anterior.

Solución:

a) La ecuación del plano es:

$1 \cdot (x - 3) + 1 \cdot (y + 1) + 1 \cdot (z + 1) = 0$, es decir:

$x + y + z - 1 = 0$

b) Obtenemos los puntos de corte del plano con los ejes de coordenadas:

– Con el eje $X \quad \rightarrow \quad y = z = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1 \quad \rightarrow$ Punto $A(1, 0, 0)$.

– Con el eje $Y \quad \rightarrow \quad x = z = 0 \quad \rightarrow \quad y = 1 \quad \rightarrow$ Punto $B(0, 1, 0)$.

– Con el eje $Z \quad \rightarrow \quad x = y = 0 \quad \rightarrow \quad z = 1 \quad \rightarrow$ Punto C(0, 0, 1).

El cuarto vértice del tetraedro es el origen $D(0, 0, 0)$.

$$\overrightarrow{DA}(1, 0, 0) \quad \overrightarrow{DB}(0, 1, 0) \quad \overrightarrow{DC}(0, 0, 1)$$

$$\left[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \rightarrow \quad \text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6} \text{ u}^3$$

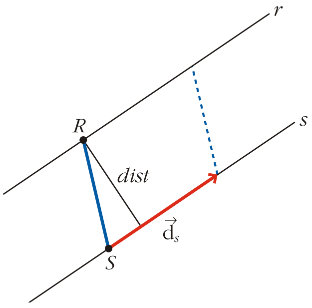
<u>Ejercicio nº 28.-</u>

Calcula el volumen de un cubo que tiene uno de sus lados sobre la recta $r: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$ y otro sobre la recta $s: \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}$.

Solución:

$\vec{d}_r = (2, 1, -1)$ // $\vec{d}_s(4, 2, -2)$. Por tanto las dos rectas son paralelas.

El lado del cuadrado es la distancia entre r y s.



$$dist(r, s) = dist(R, s) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{\left|\overrightarrow{RS} \times \vec{d}_s\right|}{\left|\vec{d}_s\right|} = \frac{|(-4, -2, -10)|}{\sqrt{16+4+4}} = \frac{\sqrt{120}}{\sqrt{24}} = \sqrt{5} = \text{arista del cubo}$$

Por tanto, $\text{Volumen} = \left(\sqrt{5}\right)^3 = 5\sqrt{5}\ \text{u}^3$

<u>Ejercicio nº 29.-</u>

Considera los puntos *P*(2, 1, 1) y *Q*(4, 5, 3).

a) Obtén la ecuación del plano que pasa por el punto medio de $\overrightarrow{PQ}$ y es perpendicular a este.

b) Calcula el volumen del tetraedro limitado por los ejes de coordenadas y el plano π.

Solución:

a) Hallamos el punto medio de $\overrightarrow{PQ} \to M(3, 3, 2)$

El vector normal al plano es $\overrightarrow{PQ} = (2, 4, 2)$, así:

π: $2(x - 3) + 4(y - 3) + 2(z - 2) = 0 \quad \to \quad \pi$: $2x + 4y + 2z - 22 = 0 \quad \to$

$\to \quad \pi$: $x + 2y + z - 11 = 0$

b) Puntos de corte con los ejes:

Si $y = 0,\ z = 0 \ \to\ x = 11 \ \to\ A(11, 0, 0)$

Si $x = 0,\ z = 0 \ \to\ y = \frac{11}{2} \ \to\ B\left(0, \frac{11}{2}, 0\right)$

Si $x = 0,\ y = 0 \ \to\ z = 11 \ \to\ C(0, 0, 11)$

$D(0, 0, 0)$

$\overrightarrow{DA}(11, 0, 0)$ $\overrightarrow{DB}\left(0, \frac{11}{2}, 0\right)$ $\overrightarrow{DC}(0, 0, 11)$

$$\text{Volumen de } ABCD = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\right]\right| = \frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1\,331}{2} =$$

$$= \frac{1331}{12} = 110{,}92 \text{ u}^3$$

Ejercicio nº 30.-

$A(0, 1, 2)$, $B(0, 2, 3)$ y $C(0, 2, 5)$ son tres vértices de un tetraedro. El cuarto vértice, D, está sobre la recta:

$$r: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$$

Halla las coordenadas de D para que el volumen del ortoedro sea 2 unidades cúbicas.

Solución:

D es un punto de r $\rightarrow$ $D(2-\lambda,\ \lambda,\ 1+\lambda)$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\cdot\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right|$$

$$\overrightarrow{AB} = (0, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0, 1, 3)$$

$$\overrightarrow{AD} = (2-\lambda,\ \lambda-1,\ \lambda-1)$$

$$\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2-\lambda & \lambda-1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 2 \ \rightarrow\ |4-2\lambda| = 12\ \begin{cases} 4-2\lambda = 12 \ \rightarrow\ \lambda = -4 \\ 2\lambda - 4 = 12 \ \rightarrow\ \lambda = 8 \end{cases}$$

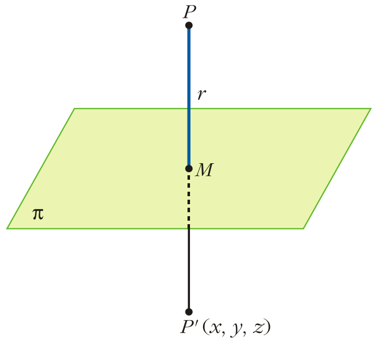
Hay dos soluciones:

$D(6, -4, -3)$ y $D(-6, 8, 9)$.

PROBLEMAS MÉTRICOS

Ejercicio nº 31.-

Halla el punto simétrico de $P(0, 2, 1)$, respecto del plano π: $x + y - z = 2$.



Solución:

Hallamos la recta r que pasa por P y es perpendicular al plano π.

$$\vec{d}_r = \vec{n} = (1, 1, -1) \qquad r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 1-\lambda \end{cases}$$

Obtenemos el punto, M, de corte de r y π:

El punto que buscamos, $P'(x, y, z)$, es el simétrico de P respecto de M.

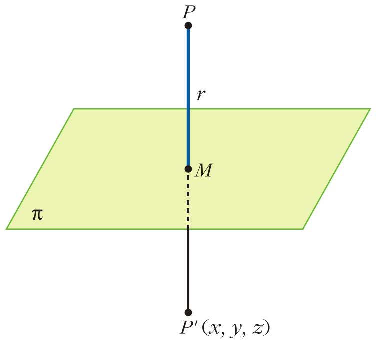
Como M es el punto medio de $\overrightarrow{PP'}$, tenemos:

$$\left(\frac{x}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z+1}{2}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right) \rightarrow x = \frac{2}{3}, y = \frac{8}{3}, z = \frac{1}{3} \rightarrow P'\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

<u>Ejercicio nº 32.-</u>

Halla el punto simétrico de $P(2, 1, 0)$ respecto del plano π: $2x - y + z = 2$.

Solución:



Hallamos la recta r que pasa por P y es perpendicular a π.

$$\vec{d}_r = \vec{n} = (2, -1, 1)$$

$$r: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 0 + \lambda \end{cases}$$

Calculamos el punto, M, de corte de r y π:

$$2(2+2\lambda) - (1-\lambda) + \lambda = 2 \rightarrow 6\lambda = -1 \rightarrow \lambda = \frac{-1}{6} \rightarrow M\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{6}, \frac{-1}{6}\right)$$

El punto buscado, $P'(x, y, z)$, es el simétrico de P respecto de M. Como M es el punto medio de $\overrightarrow{PP'}$, se tiene:

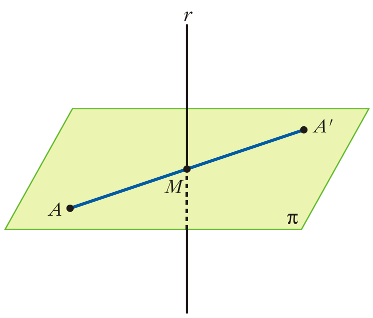
$$\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+1}{2}, \frac{z}{2}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{6}, \frac{-1}{6}\right) \rightarrow x = \frac{4}{3}, y = \frac{8}{6}, z = \frac{-1}{3} \rightarrow P'\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

<u>Ejercicio nº 33.-</u>

Determina el punto simétrico de $A(-2, 1, 3)$ respecto de la recta r:

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x = 1 + \lambda} \\ \boldsymbol{y = \quad -2\lambda} \\ \boldsymbol{z = 2} \end{cases}$$

Solución:



Hallamos el plano π que contiene al punto A y es perpendicular a r:

$$\vec{n} = \vec{d}_r = (1, -2, 0)$$

$x + 2 - 2(y - 1) = 0 \quad \rightarrow \quad x - 2y + 4 = 0$

Buscamos el punto de corte de r y π:

$M(0, 2, 2)$

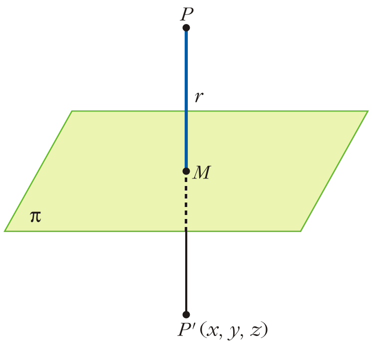
El punto A' es el simétrico de A respecto de M:

$$\left(\frac{x-2}{2}, \frac{y+1}{2}, \frac{z+3}{2}\right) = (0, 2, 2) \rightarrow x = 2, \ y = 3, \ z = 1 \rightarrow A'(2, 3, 1)$$

<u>Ejercicio nº 34.-</u>

Halla el punto simétrico de $P(1, 0, 3)$ respecto del plano $\pi: x - y + 2z = 1$.

Solución:



Hallamos la recta r que pasa por P y es perpendicular al plano π.

$$\vec{d}_r = \vec{n} = (1, -1, 2)$$

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \quad -\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

Obtenemos el punto, M, de corte de r y π:

$1 + \lambda + \lambda + 2(3 + 2\lambda) = 1 \quad \rightarrow \quad 6\lambda = -6 \quad \rightarrow \quad \lambda = -1 \quad \rightarrow \quad M(0, 1, 1)$

El punto que buscamos, $P'(x, y, z)$, es el simétrico de P respecto de M.

Como M es el punto medio de $\overrightarrow{PP'}$, tenemos:

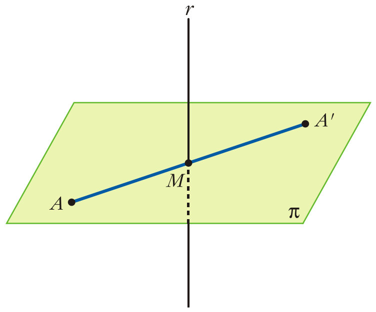
$$\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z+3}{2}\right) = (0, 1, 1) \rightarrow x = -1, \ y = 2, \ z = -1 \rightarrow P'(-1, 2, -1)$$

<u>Ejercicio nº 35.-</u>

Determina el punto simétrico de $A(2, 1, 4)$ respecto de la recta:

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$$

Solución:



Hallamos el plano π que contiene al punto A y es perpendicular a r:

$$\vec{n} = \vec{d}_r = (3, 2, -1)$$

$$3 \cdot (x - 2) + 2(y - 1) - (z - 4) = 0 \quad \rightarrow \quad 3x + 2y - z - 4 = 0$$

Buscamos el punto de corte de r y π:

$$M(1, 0, -1)$$

El punto A' es el simétrico de A respecto de M:

$$\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+1}{2}, \frac{z+4}{2}\right) = (1, 0, -1) \;\rightarrow\; x = 0,\; y = -1,\; z = -6 \;\rightarrow\; A'(0, -1, -6)$$

<u>Ejercicio nº 36.-</u>

Determina la ecuación de un plano π paralelo al plano de ecuación $2x - y + z + 4 = 0$ y que dista 10 unidades del punto $P(2, 0, 1)$.

Solución:

Un plano paralelo a $2x - y + z + 4 = 0$ es de la forma:

$$\pi: 2x - y + z + k = 0$$

Tenemos que hallar k para que la distancia a P sea 10 u:

$$dist(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 + k|}{\sqrt{4+1+1}} = 10$$

$$|5 + k| = 10\sqrt{6} \begin{cases} 5 + k = 10\sqrt{6} \;\rightarrow\; k = 10\sqrt{6} - 5 \\ -5 - k = 10\sqrt{6} \;\rightarrow\; k = -5 - 10\sqrt{6} \end{cases}$$

Hay dos planos:

$$2x - y + z + 10\sqrt{6} - 5 = 0$$

$$2x - y + z - 10\sqrt{6} - 5 = 0$$

<u>Ejercicio nº 37.-</u>

Halla la ecuación de la proyección ortogonal, r', de la recta $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+2}{1}$ sobre el plano π: $x - y + z + 2 = 0$.

Solución:

La proyección ortogonal de r sobre π es la recta de intersección del plano π con otro plano σ, perpendicular a σ y que contiene a r.

$$R(1,0,-2),\ \vec{d}_r=(2,-1,1),\ \vec{n}=(1,-1,1)$$

$$\vec{d}_r\times\vec{n}=(0,-1,-1)$$

La ecuación de σ es:

$$-1\cdot(y)-1\cdot(z+2)=0 \quad\rightarrow\quad -y-z-2=0$$

$$\sigma: y+z+2=0$$

La proyección ortogonal de r sobre π es:

$$r':\begin{cases} x-y+z+2=0\\ \quad\ \ y+z+2=0\end{cases}$$

<u>Ejercicio nº 38.-</u>

Halla la ecuación de la recta *s* que pasa por *P*(2, 0, 1) y corta perpendicularmente a la recta $r:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$.

Solución:

Buscamos el vector director de s, $\vec{d}'=(a,b,c)$, teniendo en cuenta que:

- $\vec{d}\perp\vec{d}' \rightarrow \vec{d}\cdot\vec{d}'=0 \rightarrow 2a-b+2c=0$
- r y s se cortan $\rightarrow$ $ran\left(\vec{d},\vec{d}',\overrightarrow{PR}\right)=2 \rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c\\ 2 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=0 \rightarrow -a+2b+2c=0$

Las soluciones del sistema: $\left.\begin{array}{r} 2a-b+2c=0\\ -a+2b+2c=0\end{array}\right\}$ son los vectores de la recta s:

$$\vec{d}'=(-2\lambda,-2\lambda,\lambda)$$

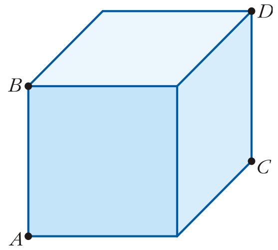
Para $\lambda=1 \rightarrow \vec{d}'=(-2,-2,1)$

Así:

$$s:\begin{cases} x=2-2\lambda\\ y=\quad\ -2\lambda\\ z=1+\lambda\end{cases}$$

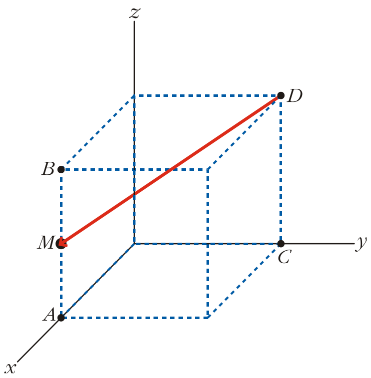
<u>Ejercicio nº 39.-</u>

En la figura adjunta, calcula el ángulo que forma la recta *CD* con la recta que une *D* y el punto medio de *AB*.



Solución:

Consideremos que el cubo es de lado 1 y está centrado en el origen.



Así $A(1, 0, 0)$, $B(1, 0, 1)$, $C(0, 1, 0)$ y $D(0, 1, 1)$

$$M = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{DM} = \left(1, -1, \frac{-1}{2}\right), \ \overrightarrow{DC} = (0, 0, -1)$$

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DC}\right|}{\left|\overrightarrow{DM}\right| \cdot \left|\overrightarrow{DC}\right|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{9}{4}} \cdot \sqrt{1}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\alpha = 70{,}53°$$

Ejercicio nº 40.-

Determina la ecuación de un plano, π, paralelo al plano de ecuación $x - y + z + 2 = 0$ y que dista 20 unidades del punto $P(0, 2, 3)$.

Solución:

Un plano paralelo a $x - y + z + 2 = 0$ es de la forma:

$$\pi: x - y + z + k = 0$$

Tenemos que hallar k para que la distancia a P sea 20 u:

$$dist(P, \pi) = \frac{|-2+3+k|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|1+k|}{\sqrt{3}} = 20$$

$$|1+k| = 20\sqrt{3} \quad \begin{cases} 1+k = 20\sqrt{3} & \rightarrow \quad k = 20\sqrt{3} - 1 \\ -1-k = 20\sqrt{3} & \rightarrow \quad k = -20\sqrt{3} - 1 \end{cases}$$

Hay dos planos:

$$x - y + z + 20\sqrt{3} - 1 = 0$$

$$x - y + z - 20\sqrt{3} - 1 = 0$$